Решение контрольной работы № 7
«Системы уравнений с несколькими неизвестными»
Вариант 1

1) $|x-3|-|2x-4|=-5$ находим корни уравнений $x-3=0$, $2x-4=0$ и отмечаем на координатной прямой эти числа 3 и 2; получили промежутки $(-\infty; 2)$, $[2; 3)$, $[3; +\infty)$; решаем исходное уравнение на каждом из полученных промежутков:

$(-\infty; 2)$: $-(x-3)+(2x-4)=-5$

$-x+3+2x-4=-5$

$x-1=-5$

$x=-4$ это число принадлежит нашему промежутку, поэтому является корнем;

$[2; 3)$: $-(x-3)-(2x-4)=-5$

$-x+3-2x+4=-5$

$-3x+7=-5$

$-3x=-12$

$x=4$ это число не принадлежит нашему промежутку, поэтому не является корнем;

$[3; +\infty)$: $(x-3)-(2x-4)=-5$

$x-3-2x+4=-5$

$-x+1=-5$

$-x=-6$

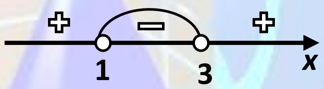
$x=6$ это число принадлежит нашему промежутку, поэтому является корнем;

Ответ: – 4 и 6.

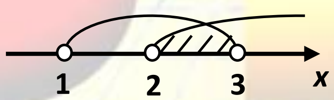
2) $\log_{0,2}(x-2)+\log_{0,2}x>\log_{0,2}(2x-3)$ решение неравенства равносильно решению системы неравенств(учитываем, что $0<0,2<1$):

$$\left[\begin{array}{l}(x-2)\cdot x<2x-3\\ x-2>0\\ x>0\\ 2x-3>0\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x^2-2x-2x+3<0\\ x>2\\ x>0\\ x>1,5\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}x^2-4x+3<0\\ x>2\end{array}\right.$$

$(x-1)(x-3)<0$



находим решение системы:



Ответ: (2; 3).

3) $\frac{\sqrt{36-x^2}\cdot\log_{0,5}x}{x-2} \le 0$ заметим, что $\sqrt{36-x^2} \ge 0$ при любом x, принадлежащим промежутку $36 - x^2 \ge 0$

$$-x^2 \ge -36$$

$$x^2 \le 36$$

$$-6 \le x \le 6,$$

таким образом решение нашего неравенства равносильно решению совокупности неравенств:

$$\begin{cases} \log_{0,5}x \ge 0 \\ x > 0 \\ x - 2 < 0 \\ -6 \le x \le 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \log_{0,5}x \le 0 \\ x > 0 \\ x - 2 > 0 \\ -6 \le x \le 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{0,5}x \ge \log_{0,5}1 \\ x > 0 \\ x < 2 \\ -6 \le x \le 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \log_{0,5}x \le \log_{0,5}1 \\ x > 0 \\ x > 2 \\ -6 \le x \le 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 1 \\ 0 < x < 2 \\ -6 \le x < 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x \ge 1 \\ x > 0 \\ 2 < x \le 6 \end{cases}$$

$$0 < x \le 1 \qquad\qquad 2 < x \le 6$$

Ответ: $(0\,;\,1]\cup(2;\,6]$.

4) $\begin{cases} 3\cdot\sqrt{x+y} - 2\cdot\sqrt{x-y} = 4 \\ 2\cdot\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 3 \end{cases}$ сделаем замену неизвестных $u = \sqrt{x+y}$ $\quad v = \sqrt{x-y}$

$\begin{cases} 3u - 2v = 4 \\ 2u - v = 3 \end{cases}$ умножаем второе уравнение на $-2(-4u + 2v = -6)$ и складываем с первым уравнением, получаем:

$-u = -2$, отсюда находим $u = 2$

выполняем подстановку во второе уравнение $2\cdot 2 - v = 3$, $v = 1$;

таким образом $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 2 \\ \sqrt{x-y} = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$ решаем способом сложения $2x = 5$, $x = 2,5$;

подставляем в первое уравнение $2,5 + y = 4$, откуда $y = 4 - 2,5 = 1,5$;

проверка: $\sqrt{2,5+1,5} = 2$ верно; $\sqrt{2,5-1,5} = 1$ верно;

Ответ: $(2,5;\,1,5)$.

sansei-alex.ru

5) $\begin{cases} 2^{\log_2(x+y+1)} = x^2 + y - 1 \\ \log_{\sqrt{29}}(y^2 + 2x) = 2 \end{cases}$ область определения $x + y + 1 > 0$; область определения $y^2 + 2x > 0$

$$\begin{cases} x + y + 1 = x^2 + y - 1 \\ y^2 + 2x = 29 \end{cases}$$

sansei-alex.ru

$$\begin{cases} x + 1 = x^2 - 1 \\ y^2 + 2x = 29 \end{cases}$$

решаем первое уравнение системы: $x + 1 = x^2 - 1$

$x^2 - x - 2 = 0$, корни -1 и 2;

выполняем подстановку найденных значений и находим y:

$y^2 + 2 \cdot (-1) = 29$	$y^2 + 2 \cdot 2 = 29$
$y^2 - 2 = 29$	$y^2 + 4 = 29$
$y^2 = 31$	$y^2 = 25$
$y = \pm\sqrt{31}$	$y = \pm 5$

выполняем проверку найденных корней:

$(-1; -\sqrt{31})$ – не подходит, так как $-1 - \sqrt{31} + 1 < 0$;

$(-1; \sqrt{31})$ – подходит;

$(2; -5)$ – не подходит, так как $2 - 5 + 1 < 0$;

$(2; 5)$ – подходит;

Ответ: $(-1; \sqrt{31})$ и $(2; 5)$.

6) $\log_x(x^2 + 3) = \log_x(4x)$ все корни уравнения будут содержатся в множестве тех x, для каждого из которых $x > 0$, $x \neq 1$, $x^2 + 3 > 0$ и $4x > 0$, то есть содержатся в множестве $(0; 1)\cup(1; +\infty)$;

sansei-alex.ru

$$\frac{\lg(x^2+3)}{\lg x} = \frac{\lg(4x)}{\lg x}$$ $\lg x \neq 0$ на множестве $(0; 1)\cup(1; +\infty)$

$$\lg(x^2 + 3) = \lg(4x)$$

$$x^2 + 3 = 4x$$

$x^2 - 4x + 3 = 0$, корни 1 и 3;

из полученных корней только 3 принадлежит $(0; 1)\cup(1; +\infty)$;

Ответ: 3.

7) $x^2 - 2x + 2 \leq \cos \pi(x + 1)$

рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 2x + 2$; $D = 4 - 8 = -4 < 0$ корней нет, $a = 1 > 0$, а значит функция имеет наименьшее значение, найдём его:

$x_0 = 2 : 2 = 1$ $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$;

рассмотрим функцию $f(x) = \cos \pi(x + 1)$, так как $-1 \le \cos \pi(x + 1) \le 1$, то наибольшее значение функции 1;

исходное неравенство будет справедливо лишь тогда, когда в неравенстве будет знак равенства, то есть неравенство равносильно системе:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 2 = 1 \\ \cos \pi(x + 1) = 1 \end{array}\right.$$

единственным решением первого уравнения является число 1;

подставляем во второе уравнение: $\cos \pi(1 + 1) = \cos 2\pi = 1$

Ответ: 1.