Решение контрольной работы № 7
«Системы уравнений с несколькими неизвестными»
Вариант 2

1) $|x-2| - |2x+2| = 1$ **находим корни уравнений $x - 2 = 0$, $2x + 2 = 0$ и отмечаем на координатной прямой эти числа – 1 и 2; получили промежутки (– ∞; – 1), [– 1; 2), [2; + ∞); решаем исходное уравнение на каждом из полученных промежутков:**

(– ∞; – 1): $-(x-2) + (2x+2) = 1$

$$-x + 2 + 2x + 2 = 1$$

$$x + 4 = 1$$

$x = -3$ **это число принадлежит нашему промежутку, поэтому является корнем;**

[– 1; 2): $-(x-2) - (2x+2) = 1$

$$-x + 2 - 2x - 2 = 1$$

$$-3x = 1$$

$x = -\frac{1}{3}$ **это число принадлежит нашему промежутку, поэтому является корнем;**

[2; + ∞): $(x-2) - (2x+2) = 1$

$$x - 2 - 2x - 2 = 1$$

$$-x - 4 = 1$$

$$-x = 5$$

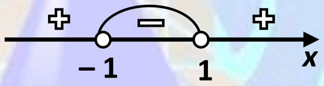
$x = -5$ **это число не принадлежит нашему промежутку, поэтому не является корнем;**

Ответ: -3 и $-\frac{1}{3}$.

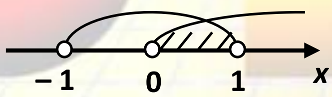
2) $\log_3(x+2) + \log_3 x < \log_3(2x+1)$ **решение неравенства равносильно решению системы неравенств(учитываем, что 3 > 1):**

$$\begin{cases} (x+2)\cdot x < 2x+1 \\ x+2>0 \\ x>0 \\ 2x+1>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+2x-2x-1<0 \\ x>-2 \\ x>0 \\ x>-0{,}5 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-1<0 \\ x>0 \end{cases}$$

$$(x-1)(x+1)<0$$



находим решение системы:



Ответ: (0; 1).

3) $\frac{\sqrt{49-x^2}\cdot\log_5 x}{x-5} \geq 0$ заметим, что $\sqrt{49-x^2} \geq 0$ при любом x, принадлежащим промежутку $49 - x^2 \geq 0$

$$-x^2 \geq -49$$

$$x^2 \leq 49$$

$$-7 \leq x \leq 7,$$

таким образом решение нашего неравенства равносильно решению совокупности неравенств:

$$\begin{cases} \log_5 x \geq 0 \\ x > 0 \\ x - 5 > 0 \\ -7 \leq x \leq 7 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \log_{0,5} x \leq 0 \\ x > 0 \\ x - 5 < 0 \\ -7 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_5 x \geq \log_5 1 \\ x > 0 \\ x > 5 \\ -7 \leq x \leq 7 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \log_5 x \leq \log_5 1 \\ x > 0 \\ x < 5 \\ -7 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x > 5 \\ -7 \leq x \leq 7 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ 0 < x < 5 \\ -7 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

$$5 < x \leq 7 \qquad\qquad 0 < x \leq 1$$

Ответ: $(0\ ;\ 1]\cup(5;\ 7]$.

4) $\begin{cases} 2\cdot\sqrt{x+y} - 3\cdot\sqrt{x-y} = 3 \\ 3\cdot\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 10 \end{cases}$ сделаем замену неизвестных $u = \sqrt{x+y}$ $\quad v = \sqrt{x-y}$

$\begin{cases} 2u - 3v = 3 \\ 3u + v = 10 \end{cases}$ умножаем второе уравнение на 3($9u + 3v = 30$) и складываем с первым уравнением, получаем:

$11u = 33$, отсюда находим $u = 33 : 11 = 3$

выполняем подстановку во второе уравнение $3 \cdot 3 + v = 10$, $v = 1$;

таким образом $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 3 \\ \sqrt{x-y} = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$ решаем способом сложения $2x = 10$, $x = 5$;

подставляем в первое уравнение $5 + y = 9$, откуда $y = 4$;

проверка: $\sqrt{5+4} = 3$ верно; $\sqrt{5-4} = 1$ верно;

Ответ: $(5;\ 4)$.

5) $\begin{cases} 3^{\log_3(x-y+1)} = x^2 - y - 1 \\ \log_{\sqrt{21}}(y^2 - 2x) = 2 \end{cases}$ область определения $x - y + 1 > 0$; область определения $y^2 - 2x > 0$

$$\begin{cases} x - y + 1 = x^2 - y - 1 \\ y^2 - 2x = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 1 = x^2 - 1 \\ y^2 - 2x = 21 \end{cases}$$

решаем первое уравнение системы: $x + 1 = x^2 - 1$

$x^2 - x - 2 = 0$, корни – 1 и 2;

выполняем подстановку найденных значений и находим y:

$y^2 - 2 \cdot (-1) = 21$	$y^2 - 2 \cdot 2 = 21$
$y^2 + 2 = 21$	$y^2 - 4 = 21$
$y^2 = 19$	$y^2 = 25$
$y = \pm\sqrt{19}$	$y = \pm 5$

выполняем проверку найденных корней:

$(-1; -\sqrt{19})$ – подходит;

$(-1; \sqrt{19})$ – не подходит, так как $-1 - \sqrt{19} + 1 < 0$;

$(2; -5)$ – подходит;

$(2; 5)$ – подходит, так как $2 - 5 + 1 < 0$;

Ответ: $(-1; -\sqrt{19})$ и $(2; -5)$.

6) $\log_x(x^2 + 4) = \log_x(5x)$ все корни уравнения будут содержатся в множестве тех x, для каждого из которых $x > 0$, $x \neq 1$, $x^2 + 4 > 0$ и $5x > 0$, то есть содержатся в множестве $(0; 1)\cup(1; +\infty)$;

$\frac{\lg(x^2+4)}{\lg x} = \frac{\lg(5x)}{\lg x}$ $\lg x \neq 0$ на множестве $(0; 1)\cup(1; +\infty)$

$\lg(x^2 + 4) = \lg(5x)$

$x^2 + 4 = 5x$

$x^2 - 5x + 4 = 0$, корни 1 и 4;

из полученных корней только 4 принадлежит $(0; 1)\cup(1; +\infty)$;

Ответ: 4.

7) $x^2 - 4x + 5 \leq \sin \pi(x + 0,5)$

рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 4x + 5$; $D = 16 - 20 = -4 < 0$ корней нет, $a = 1 > 0$, а значит функция имеет наименьшее значение, найдём его:

$x_0 = 4 : 2 = 2$ $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1$;

рассмотрим функцию $f(x) = \sin \pi(x + 0{,}5)$, так как $-1 \le \sin \pi(x + 0{,}5) \le 1$, то наибольшее значение функции 1;

исходное неравенство будет справедливо лишь тогда, когда в неравенстве будет знак равенства, то есть неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 1 \\ \sin \pi(x + 0{,}5) = 1 \end{cases}$$

единственным решением первого уравнения является число 2;

подставляем во второе уравнение: $\sin \pi(2 + 0{,}5) = \sin 2{,}5\pi = 1$

Ответ: 2.