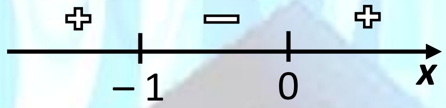
Решение контрольной работы № 3
«Применение производной»
Вариант 1

1) **функция $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ имеет производную для всех $x \in R$;**

$f'(x) = (2x^3 + 3x^2 - 1)' = 6x^2 + 6x = 6x(x + 1)$; применяем метод интервалов; корни -1 и 0;



а) функция возрастает на промежутках $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$

функция убывает на промежутке $[-1; 0]$

б) $f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 1 = -2 + 3 - 1 = 0$

$f(0) = 2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 1 = 0 + 0 - 1 = -1$ – наименьшее

$f(2) = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 1 = 16 + 12 - 1 = 27$ – наибольшее

Ответ: а) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$ – возрастает; $[-1; 0]$ – убывает б) -1 и 27.

2) **$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 2x + 2)' = 3x^2 + 6x - 2$;**

$f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1 + 3 - 2 + 2 = 4$;

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 2 = 3 + 6 - 2 = 7$; составляем уравнение касательной: $y - 4 = 7(x - 1) = 7x - 7$, откуда $y = 7x - 7 + 4 = 7x - 3$

Ответ: $y = 7x - 3$.

3) функция $f(x) = x^3 - 3x$ определена и непрерывна для всех x;

$f(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ – функция нечётная, значит график симметричен относительно точки начала координат;

$f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$

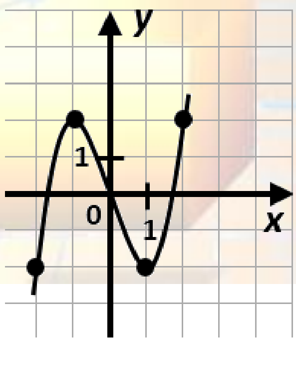
x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	– 2	↗
		max		min	

найдём дополнительно несколько точек графика:

$x^3 - 3x = 0$, $x(x^2 - 3) = 0$; откуда находим 0; $\pm\sqrt{3}$

$f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) = -8 + 6 = -2$ $(-2; -2)$, тогда и $(2; 2)$

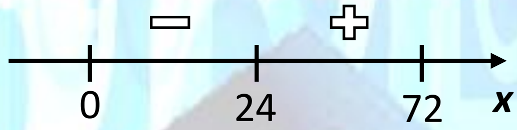
Ответ:



4) Обозначим равные слагаемые через x, тогда третье слагаемое будет равно $72 - 2x$. Составим и исследуем на наименьшее значение на промежутке $(0; 72)$ функцию:

$f(x) = x^2 + x^2 + (72 - 2x)^2 = x^2 + x^2 + 5184 - 288x + 4x^2 = 6x^2 - 288x + 5184$;

$f'(x) = (6x^2 - 288x + 5184)' = 12x - 288$; $12x - 288 = 0$, откуда $x = 24$;



Наименьшее значение достигается в точке 24, поэтому число 72 представляем в виде $24 + 24 + 24$;

Ответ: $72 = 24 + 24 + 24$.

5) Дана функция $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$

а) $-x^2 + 6x - 5 \geq 0$

$x^2 - 6x + 5 \leq 0$ корни квадратного трёхчлена 1 и 5, поэтому

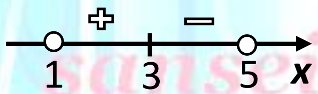
область определения $[1; 5]$

б) $f'(x) = (\sqrt{-x^2 + 6x - 5})' = ((-x^2 + 6x - 5)^{\frac{1}{2}})' =$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-x^2 + 6x - 5)^{\frac{1}{2} - 1} \cdot (-x^2 + 6x - 5)' =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-x^2 + 6x - 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x + 6) = \frac{-2x+6}{2\sqrt{-x^2+6x-5}} = \frac{2(-x+3)}{2\sqrt{-x^2+6x-5}} =$$

$$= \frac{-x+3}{\sqrt{-x^2+6x-5}};$$



$[1; 3]$ - возрастает $[3; 5]$ – убывает

в) $f(2) = \sqrt{-2^2 + 6 \cdot 2 - 5} = \sqrt{-4 + 12 - 5} = \sqrt{3}$

$f(3) = \sqrt{-3^2 + 6 \cdot 3 - 5} = \sqrt{-9 + 18 - 5} = \sqrt{4} = 2$ – наибольшее

$f(5) = \sqrt{-5^2 + 6 \cdot 5 - 5} = \sqrt{-25 + 30 - 5} = \sqrt{0} = 0$ – наименьшее

Ответ: а) $[1; 5]$ б) $[1; 3]$ – возрастает $[3; 5]$ – убывает в) 0; 2.

6) $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x + 10)' = 3x^2 - 6x + 2$; по условию касательная должна быть параллельна прямой $y = -x + 5$, а значит её коэффициент будет равняться -1, поэтому $3x^2 - 6x + 2 = -1$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$(x - 1)^2 = 0$, откуда $x = 1$;

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 10 = 1 - 3 + 2 + 10 = 10$

составляем уравнение касательной: $y - 10 = -1 \cdot (x - 1) = -x + 1$, откуда получаем $y = -x + 1 + 10 = -x + 11$;

Ответ: $y = -x + 11$.

7) Найдём вторую производную данной функции на всей области определения $(-\infty; +\infty)$:

$$y' = (5x - \sin 2x)' = 5 - \cos 2x \cdot (2x)' = 5 - 2\cos 2x$$

$$y'' = (5 - 2\cos 2x)' = 4\sin 2x$$

$4\sin 2x > 0$	$4\sin 2x < 0$
$\sin 2x > 0$	$\sin 2x < 0$
$2\pi n < 2x < \pi + 2\pi n$	$-\pi + 2\pi n < 2x < 2\pi n$
$\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$	$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi n$
$(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in Z$;	$(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n)$, $n \in Z$;
выпуклость вниз	выпуклость вверх

Ответ: выпуклость вниз на $(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in Z$;

выпуклость вверх на $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n)$, $n \in Z$;

sansei-alex.ru