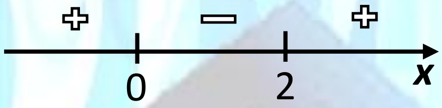
Решение контрольной работы № 3
«Применение производной»
Вариант 2

1) функция $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ имеет производную для всех $x \in R$;

$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 1)' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$; применяем метод интервалов; корни 0 и 2;



а) функция возрастает на промежутках $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$

функция убывает на промежутке $[0; 2]$

б) $f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 + 1 = -8 - 12 + 1 = -19$ – наименьшее

$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$ – наибольшее

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

Ответ: а) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$ – возрастает; $[0; 2]$ – убывает б) – 19 и 1.

2) $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x + 4)' = 3x^2 - 6x + 2$;

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 4 = 1 - 3 + 2 + 4 = 4$;

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = 3 - 6 + 2 = -1$; составляем уравнение касательной: $y - 4 = -1 \cdot (x - 1) = -x + 1$, откуда $y = -x + 1 + 4 = -x + 5$

Ответ: $y = -x + 5$.

3) функция $f(x) = x^4 - 2x^2$ определена и непрерывна для всех x;

$f(-x) = (-x)^4 - 2 \cdot (-x)^2 = x^4 + 2x^2 = f(x)$ – функция чётная, значит график симметричен относительно оси ординат;

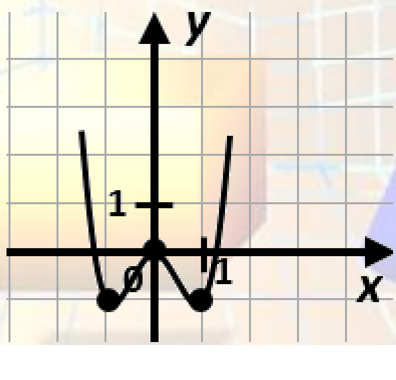
$f'(x) = (x^4 - 2x^2)' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗
		min		max		min	

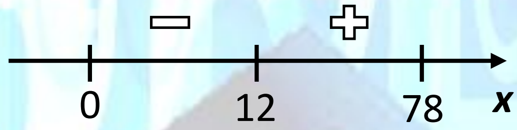
найдём дополнительно несколько точек графика:

$x^4 - 2x^2 = 0$, $x^2(x^2 - 2) = 0$; откуда находим $0; \pm\sqrt{2}$

Ответ:



4) Обозначим пропорциональные слагаемые через x и $3x$,тогда третье слагаемое будет равно $78 - 4x$. Составим и исследуем на наименьшее значение на промежутке (0; 78) функцию: $f(x) = x^2 + (3x)^2 + (78 - 4x)^2 =$
$= x^2 + 9x^2 + 6084 - 624x + 16x^2 = 26x^2 - 624x + 6084$;
$f'(x) = (26x^2 - 624x + 6084)' = 52x - 624$; $52x - 624 = 0$, откуда $x = 12$;



Наименьшее значение достигается в точке 12, поэтому число 78 представляем в виде 12 + 36 + 30;

Ответ: 78 = 12 + 30 + 36.

5) Дана функция $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x - 7}$

а) $-x^2 + 8x - 7 \geq 0$

$x^2 - 8x + 7 \leq 0$ корни квадратного трёхчлена 1 и 7, поэтому

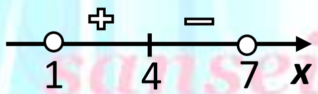
область определения [1; 7]

б) $f'(x) = (\sqrt{-x^2 + 8x - 7})' = ((-x^2 + 8x - 7)^{\frac{1}{2}})' =$

$= \frac{1}{2} \cdot (-x^2 + 8x - 7)^{\frac{1}{2} - 1} \cdot (-x^2 + 8x - 7)' =$

$= \frac{1}{2} \cdot (-x^2 + 8x - 7)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x + 8) = \frac{-2x+8}{2\sqrt{-x^2+8x-7}} = \frac{2(-x+4)}{2\sqrt{-x^2+8x-7}} =$

$= \frac{-x+4}{\sqrt{-x^2+8x-7}}$;



[1; 4] - возрастает [4; 7] – убывает

в) $f(3) = \sqrt{-3^2 + 8 \cdot 3 - 7} = \sqrt{-9 + 24 - 7} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$f(4) = \sqrt{-4^2 + 8 \cdot 4 - 7} = \sqrt{-16 + 32 - 7} = \sqrt{9} = 3$ – наибольшее

$f(7) = \sqrt{-7^2 + 8 \cdot 7 - 7} = \sqrt{-49 + 56 - 7} = \sqrt{0} = 0$ – наименьшее

Ответ: а) [1; 7] б) [1; 4] – возрастает [4; 7] – убывает в) 0; 3.

6) $f'(x) = (x^3 + 3x^2 + x + 7)' = 3x^2 + 6x + 1$; по условию касательная должна быть параллельна прямой $y = -2x + 1$, а значит её коэффициент будет равняться -2, поэтому $3x^2 + 6x + 1 = -2$

$3x^2 + 6x + 3 = 0$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$(x + 1)^2 = 0$, откуда $x = -1$;

$f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + (-1) + 7 = -1 + 3 - 1 + 7 = 8$

составляем уравнение касательной: $y - 8 = -2 \cdot (x + 1) = -2x - 2$, откуда получаем $y = -2x - 2 + 8 = -2x + 6$;

Ответ: $y = -2x + 6$.

7) Найдём вторую производную данной функции на всей области определения $(-\infty; +\infty)$:

$y' = (7x + \cos 2x)' = 7 - \sin 2x \cdot (2x)' = 7 - 2\sin 2x$

$y'' = (7 - 2\sin 2x)' = -4\cos 2x$

$-4\cos 2x > 0$	$-4\cos 2x < 0$
$\cos 2x < 0$	$\cos 2x > 0$
$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < 2x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n$	$-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n$
$(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n)$, $n \in Z$;	$(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n)$, $n \in Z$;
выпуклость вниз	выпуклость вверх

Ответ: выпуклость вниз на $(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n)$, $n \in Z$;

выпуклость вверх на $(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n)$, $n \in Z$;