Решение контрольной работы № 4
«Первообразная и интеграл»
Вариант 1

1) а) $F^{/}(x) = (x^3 - 5x^2 + 7x - 11)^{/} = 3x^2 - 10x + 7 = f(x)$

б) $F^{/}(x) = (2x^5 + e^x)^{/} = 10x^4 + e^x = f(x)$

Ответ: что и требовалось доказать.

2) а) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 2\sin x = x^{-2} - 2\sin x$

$$F(x) = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 2 \cdot (-\cos x) + C = \frac{x^{-1}}{-1} + 2\cos x + C = -\frac{1}{x} + 2\cos x + C$$

б) $F(x) = \ln x + C$

Ответ: а) $-\dfrac{1}{x} + 2\cos x + C$ **б)** $\ln x + C$.

3) $F(x) = 4 \cdot \dfrac{x^{3+1}}{3+1} - 8 \cdot \dfrac{x^{1+1}}{1+1} + C = 4 \cdot \dfrac{x^4}{4} - 8 \cdot \dfrac{x^2}{2} + C = x^4 - 4x^2 + C$

подставляем координаты данной точки $A(1;\ 3)$:

$$1^4 - 4 \cdot 1^2 + C = 3$$

$$1 - 4 + C = 3$$

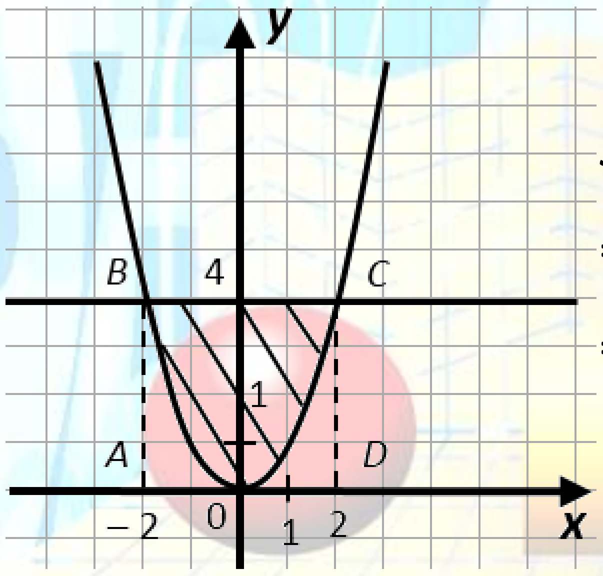
$$-3 + C = 3$$

$$C = 3 + 3 = 6$$

таким образом $F(x) = x^4 - 4x^2 + 6$

Ответ: $F(x) = x^4 - 4x^2 + 6$.

4) Определяем абсциссы точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = 4$, а так же сделаем рисунок фигуры, площадь которой надо найти:



$x^2 = 4$, находим корни -2 и 2;

$$S_{BOC} = S_{ABCD} - S_{ABOCD} = AB \cdot AD - \int_{-2}^{2} x^2\,dx =$$

$$= 4 \cdot 4 - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = 16 - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right) =$$

$$= 16 - \left(\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3} = 16 - 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$$

Ответ: $10\dfrac{2}{3}$.

5) а) $\int \sqrt{3x+1}\,dx = \int (3x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(3x+1)^3} + C = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3} + C$

б) $\int \frac{dx}{1+9x^2}$ сделаем подстановку $t = 3x$, тогда $dt = (3x)^{/}dx = 3dx$,

откуда находим $\int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{3dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg} t + C =$

$= \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg} 3x + C = \frac{arctg\,3x}{3} + C$

Ответ: а) $\frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3} + C$ б) $\frac{arctg\,3x}{3} + C$.

6) Определим абсциссы точек пересечения графиков функций $y = x^2 - 6x + 7$ и $y = -x^2 + 4x - 1$, а так же сделаем рисунок фигуры, площадь которой надо найти: $x^2 - 6x + 7 = -x^2 + 4x - 1$

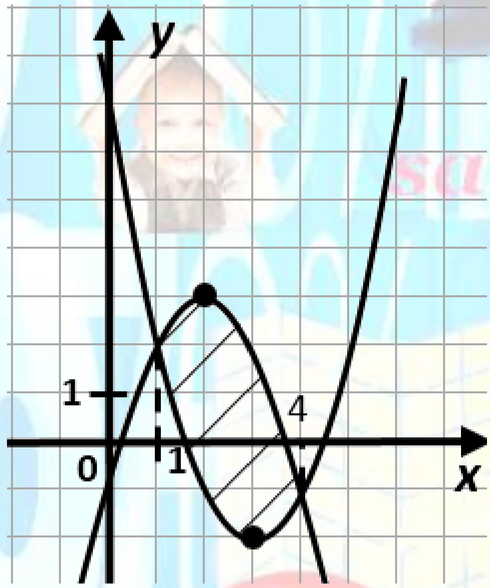
$x^2 - 6x + 7 + x^2 - 4x + 1 = 0$

$2x^2 - 10x + 8 = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0$, корни 1 и 4

$y^{/} = (x^2 - 6x + 7)^{/} = 2x - 6$; $2x - 6 = 0$; $x = 3$ вершина $(3; -2)$

$y^{/} = (-x^2 + 4x - 1)^{/} = -2x + 4$; $-2x + 4 = 0$; $x = 2$ вершина $(2; 3)$



$S = \int_1^4((-x^2 + 4x - 1) - (x^2 - 6x + 7))dx =$

$= \int_1^4(-x^2 + 4x - 1 - x^2 + 6x - 7)dx =$

$= \int_1^4(-2x^2 + 10x - 8)dx =$

$= (-2 \cdot \frac{x^3}{3} + 10 \cdot \frac{x^2}{2} - 8x)\Big|_1^4 =$

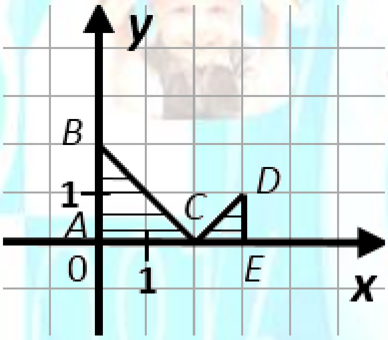
$= (-\frac{2x^3}{3} + 5x^2 - 8x)\Big|_1^4 =$

$= (-\frac{2 \cdot 4^3}{3} + 5 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4) - (-\frac{2}{3} + 5 - 8) =$

$= -\frac{128}{3} + 80 - 32 + \frac{2}{3} - 5 + 8 = -\frac{126}{3} + 51 = -42 + 51 = 9$

Ответ: 9.

7) Вычислим интеграл $\int_0^3 |x-2|dx$ используя его геометрический смысл, то есть нам нужно найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y = |x-2|$, $y = 0$, $y = 3$.



$$\int_0^3 |x-2|dx = S_{ABC} + S_{CDE} = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} = 2 + 0{,}5 = 2{,}5$$

Ответ: 2,5.