Решение контрольной работы № 6
«Равносильность уравнений и неравенств на множествах»
Вариант 1

1) $\sqrt{x-6} = x - 7$

$\begin{cases} (\sqrt{x-6})^2 = (x-7)^2 \\ x - 7 \geq 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x - 6 = x^2 - 14x + 49 \\ x \geq 7 \end{cases}$

решаем уравнение: $x - 6 = x^2 - 14x + 49$

$x^2 - 15x + 55 = 0$; $D = 225 - 220 = 5 > 0$

$x_1 = \frac{15-\sqrt{5}}{2} = 7,5 - 0,5\sqrt{5}$ не подходит, так как $7,5 - 0,5\sqrt{5} < 7$

$x_2 = \frac{15+\sqrt{5}}{2} = 7,5 + 0,5\sqrt{5}$ подходит, так как $7,5 + 0,5\sqrt{5} > 7$

Ответ: $7,5 + 0,5\sqrt{5}$.

2) $\lg(x^3 - 5x^2 + 6x + 7) = \lg(x^3 - 4x^2 + 7x + 1)$

$x^3 - 5x^2 + 6x + 7 = x^3 - 4x^2 + 7x + 1$

$-5x^2 + 6x + 7 = -4x^2 + 7x + 1$

$-5x^2 + 6x + 7 + 4x^2 - 7x - 1 = 0$

$-x^2 - x + 6 = 0$ $\quad D = 1 + 24 = 25 > 0$

$x_1 = \frac{1-5}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$ $\qquad$ $x_1 = \frac{1+5}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$

проверка: $\lg(2^3 - 5\cdot 2^2 + 6\cdot 2 + 7) = \lg(2^3 - 4\cdot 2^2 + 7\cdot 2 + 1)$

$\lg(8 - 20 + 12 + 7) = \lg(8 - 16 + 14 + 1)$

$\lg 7 = \lg 7$

корень 2 является решением уравнения;

$\lg((-3)^3 - 5\cdot(-3)^2 + 6\cdot(-3) + 7) = \lg(-27 - 45 - 18 + 7) =$
$= \lg(-83)$ – выражение не имеет смысла, поэтому корень – 3 не является решением уравнения;

Ответ: 2.

3) $(x^2 - 5x - 14)\cdot\sqrt{x-6} = 0$

$x^2 - 5x - 14 = 0$ $\qquad$ $\sqrt{x-6} = 0$

корни – 2 и 7 $\qquad$ корень 6

корень – 2 не подходит, так как $\sqrt{-2-6} = \sqrt{-8}$; $-8 < 0$

Ответ: 6 и 7.

4) $\dfrac{\sin 2\pi x}{4x-1} = \dfrac{1}{4x-1}$

$\begin{cases} \sin 2\pi x = 1 \\ 4x - 1 \neq 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 2\pi x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \\ 4x \neq 1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{4} + n,\ n \in Z \\ x \neq \dfrac{1}{4} \end{cases}$

решением уравнения будут все числа вида $x = \dfrac{1}{4} + n,\ n \neq 0,\ n \in Z;$

Ответ: $\dfrac{1}{4} + n,\ n \neq 0,\ n \in Z.$

5) $\sqrt{3x-2} \leq x$ **неравенство равносильно системе неравенств:**

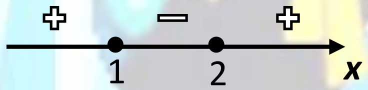
$\begin{cases} (\sqrt{3x-2})^2 \leq (x)^2 \\ 3x - 2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 3x - 2 \leq x^2 \\ 3x \geq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$

решаем первое неравенство системы: $3x - 2 \leq x^2$

$-x^2 + 3x - 2 \leq 0$

$x^2 - 3x + 2 \geq 0$, **корни трёхчлена 1 и 2**

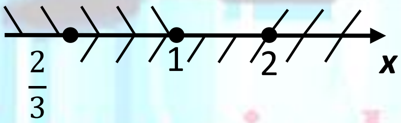
применяем метод интервалов



$(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$

решаем второе неравенство системы: $x \geq \dfrac{2}{3}$ **, таким образом:**

$\begin{cases} -x^2 + 3x - 2 \leq 0 \\ x \geq \dfrac{2}{3} \end{cases}$



$[\dfrac{2}{3}; 1] \cup [2; +\infty)$

Ответ: $[\dfrac{2}{3}; 1] \cup [2; +\infty).$

6) $\sqrt{x+3} > x - 3$ **множество решений данного неравенства будет объединение множеств решений двух систем:**

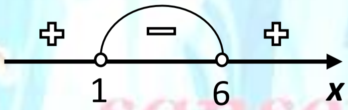
$\begin{cases} (\sqrt{x+3})^2 > (x-3)^2 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}$ **и** $\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$

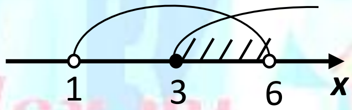
$\begin{cases} x + 3 > x^2 - 6x + 9 \\ x \geq 3 \end{cases}$ **и** $\begin{cases} x \geq -3 \\ x < 3 \end{cases}$

$\begin{cases} -x^2 + 7x - 6 > 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$ **и** $-3 \leq x < 3$

$[-3; 3)$

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 < 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-6) < 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$$





[3; 6)

таким образом решением исходного неравенства будет являться объединение промежутков [– 3; 3)∪[3; 6) = [– 3; 6)

Ответ: [– 3; 6).

7) $2^{3x+7} + \sqrt{3x+7} = 2^{x^2-11} + \sqrt{x^2-11}$

областью существования функции $f(u) = 2^u + \sqrt{u}$ будет являться промежуток [0; + ∞); а так же учитывая, что функция возрастает на данном промежутке(как сумма возрастающих функций), составляем систему:

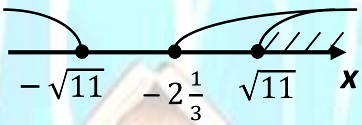
$$\begin{cases} 3x + 7 = x^2 - 11 \\ 3x + 7 \geq 0 \\ x^2 - 11 \geq 0 \end{cases}$$

решаем уравнение системы $3x + 7 = x^2 - 11$

$x^2 - 3x - 18 = 0$, корни – 3 и 6;

решаем неравенство $3x + 7 \geq 0$, откуда $x \geq -2\frac{1}{3}$

решаем неравенство $x^2 - 11 \geq 0$; $x^2 \geq 11$, откуда $x \leq -\sqrt{11}$ и $x \geq \sqrt{11}$



[$\sqrt{11}$; + ∞), подходит только корень 6;

Ответ: 6.