

Решение контрольной работы № 4
«Рациональные уравнения»

Вариант 1

1) а) $(2x^2 - 5x - 7)(x - 1) = 0$

$2x^2 - 5x - 7 = 0$ и $x - 1 = 0$

решаем уравнение $2x^2 - 5x - 7 = 0$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 25 + 56 = 81 > 0$

$$x_{1;2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 9}{4}$$

$$x_1 = \frac{5+9}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3,5 \quad x_2 = \frac{5-9}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

решаем уравнение $x - 1 = 0$, откуда $x = 1$

б) $x^3 - 9x = 0$

$x(x^2 - 9) = 0$

$x(x - 3)(x + 3) = 0$

решаем уравнения $x = 0$; $x - 3 = 0$; $x + 3 = 0$,

получаем $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = -3$;

в) $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$, после замены переменной $y = x^2$ получаем:

$y^2 - 7y + 6 = 0$ $D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25 > 0$

$$y_{1;2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 5}{2}$$

$$y_1 = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad y_2 = \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

решаем уравнения: $x^2 = 6$ и $x^2 = 1$, получаем

$x_1 = \sqrt{6}$, $x_2 = -\sqrt{6}$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$;

Ответ: а) -1 ; 1 ; $3,5$ б) -3 ; 0 и 3 в) $\pm \sqrt{6}$, ± 1 .

2) а) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 0$

решаем уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$

$$x_{1;2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

подставляем найденные корни в знаменатель:

$x - 2 = 2 - 2 = 0$; $x = 2$ не является корнем

$x - 2 = 1 - 2 = -1 \neq 0$; $x = 1$ является корнем

$$\begin{aligned} 6) \quad & \frac{5}{x^2+2x+1} = \frac{2}{1-x^2} + \frac{1}{x-1} \\ & \frac{5}{x^2+2x+1} - \frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{x-1} = 0 \\ & \frac{5}{x^2+2x+1} + \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} = 0 \\ & \frac{5^{x-1}}{(x+1)^2} + \frac{2^{x+1}}{(x-1)(x+1)} - \frac{1^{(x+1)^2}}{x-1} = 0 \\ & \frac{5(x-1)+2(x+1)-(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)} = 0 \\ & \frac{5x-5+2x+2-x^2-2x-1}{(x+1)^2(x-1)} = 0 \\ & \frac{-x^2+5x-4}{(x+1)^2(x-1)} = 0 \end{aligned}$$

решаем уравнение $-x^2 + 5x - 4 = 0$

$$D = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 25 - 16 = 9 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm 3}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-5+3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad x_2 = \frac{-5-3}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

подставляем найденные корни в знаменатель:

$$(x+1)^2 \cdot (x-1) = (1+1)^2 \cdot (1-1) = 0; \quad x = 1 \text{ не является корнем}$$

$$(x+1)^2 \cdot (x-1) = (4+1)^2 \cdot (4-1) \neq 0; \quad x = 4 \text{ является корнем}$$

Ответ: а) 1 б) 4.

3) Пусть x км/ч скорость первого велосипедиста, тогда скорость второго велосипедиста будет $x - 1$ км/ч. Время в пути первого велосипедиста составит $\frac{90}{x}$ часов, а второго $\frac{90}{x-1}$ часов. По условию на дорогу первый велосипедист затратил на 1 час меньше, чем второй, поэтому составляем уравнение:

уравнение: $\frac{90}{x-1} - \frac{90}{x} = 1$. Решаем полученное уравнение:

$$\frac{90^x}{x-1} - \frac{90^{x-1} \cdot x(x-1)}{x} - 1 = 0$$

$$\frac{90x - 90(x-1) - x(x-1)}{x(x-1)} = 0$$

$$\frac{90x - 90x + 90 - x^2 + x}{x(x-1)} = 0$$

$$\frac{-x^2 + x + 90}{x(x-1)} = 0$$

решаем уравнение $-x^2 + x + 90 = 0$

$$D = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 90 = 1 + 360 = 361 > 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm 19}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-1+19}{-2} = \frac{18}{-2} = -9 \quad x_2 = \frac{-1-19}{-2} = \frac{-20}{-2} = 10$$

подставляем найденные корни в знаменатель:

$$x(x-1) = (-9) \cdot (-9-1) \neq 0; \quad x = -9 \text{ является корнем}$$

$$x(x-1) = 10 \cdot (10-1) \neq 0; \quad x = 10 \text{ является корнем}$$

корень -9 не подходит по смыслу задачи (скорость отрицательная),
скорость первого велосипедиста 10 км/ч, а второго $10 - 1 = 9$ (км/ч);

Ответ: 10 км/ч и 9 км/ч.

4) $(x^2 - 5x)^2 + 10x^2 - 50x + 24 = 0$

$$(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$$

сделаем замену неизвестного $y = x^2 - 5x$, тогда

$$y^2 + 10y + 24 = 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = 100 - 96 = 4 > 0$$

$$y_{1;2} = \frac{-10 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm 2}{2}$$

$$y_1 = \frac{-10+2}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \quad y_2 = \frac{-10-2}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

подставляем найденные корни и получаем два уравнения:

$$x^2 - 5x = -4 \quad \text{и} \quad x^2 - 5x = -6$$

решаем первое уравнение $x^2 - 5x = -4$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

используя теорему Виета находим корни: 1 и 4 ;

решаем второе уравнение $x^2 - 5x = -6$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

используя теорему Виета находим корни: 2 и 3 ;

Ответ: $1; 2; 3$ и 4 .

5) $x^3 + ax^2 - 5x + 6 = 0$; подставим значение одного из его корней 3 и найдём значение a :

$$\begin{aligned}3^3 + a \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 &= 0 \\27 + 9a - 15 + 6 &= 0 \\9a + 18 &= 0 \\9a &= -18\end{aligned}$$

$$a = -18 : 9 = -2$$

наше уравнение примет вид: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$;

выполним деление многочлена $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ на $x - 3$ (корень)

$$\begin{array}{r|l}x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x - 3 \\ \underline{x^3 - 3x^2} & \\ x^2 - 5x + 6 & \\ \underline{x^2 - 3x} & \\ -2x + 6 & \\ \underline{-2x + 6} & \\ 0 & \end{array}$$

наше уравнение примет вид $(x^2 + x - 2)(x - 3) = 0$

решим уравнение $x^2 + x - 2 = 0$

используя теорему Виета находим корни: -2 и 1 ;

Ответ: -2 ; 1 и 3 .

sansei-alex.ru

