Решение контрольной работы № 4
«Рациональные уравнения»
Вариант 2

1) а) $(3x^2 - 2x - 5)(x + 2) = 0$

$3x^2 - 2x - 5 = 0$ и $x + 2 = 0$

решаем уравнение $3x^2 - 2x - 5 = 0$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 4 + 60 = 64 > 0$

$$x_{1;2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 8}{6}$$

$$x_1 = \frac{2+8}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} \qquad x_2 = \frac{2-8}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

решаем уравнение $x + 2 = 0$, откуда $x = -2$

б) $x^3 - 4x = 0$

$x(x^2 - 4) = 0$

$x(x - 2)(x + 2) = 0$

решаем уравнения $x = 0$; $x - 2 = 0$; $x + 2 = 0$,

получаем $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$;

в) $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$, после замены переменной $y = x^2$ получаем:

$y^2 - 6y + 5 = 0$ $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 > 0$

$$y_{1;2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$y_1 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \qquad y_2 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

решаем уравнения: $x^2 = 5$ и $x^2 = 1$, получаем

$x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$;

Ответ: а) -2; -1; $1\frac{2}{3}$ б) -2; 0 и 2 в) $\pm\sqrt{5}$, ± 1.

2) а) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = 0$

решаем уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$

$$x_{1;2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

подставляем найденные корни в знаменатель:

$x - 3 = 3 - 3 = 0$; $x = 3$ не является корнем

$x - 3 = -1 - 3 = -4 \neq 0$; $x = -1$ является корнем

б) $$\frac{3}{x^2-6x+9} = \frac{1}{x+3} - \frac{6}{9-x^2}$$

$$\frac{3}{x^2-6x+9} + \frac{6}{9-x^2} - \frac{1}{x+3} = 0$$

$$\frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{x+3} = 0$$

$$\frac{\overset{x+3}{3}}{(x-3)^2} - \frac{\overset{x-3}{6}}{(x-3)(x+3)} - \frac{\overset{(x-3)^2}{1}}{x+3} = 0$$

$$\frac{3(x+3)-6(x-3)-(x-3)^2}{(x-3)^2(x+3)} = 0$$

$$\frac{3x+9-6x+18-x^2+6x-9}{(x-3)^2(x+3)} = 0$$

$$\frac{-x^2+3x+18}{(x-3)^2(x+3)} = 0$$

решаем уравнение $-x^2 + 3x + 18 = 0$

$D = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 18 = 9 + 72 = 81 > 0$

$$x_{1;2} = \frac{-3\pm\sqrt{81}}{2\cdot(-1)} = \frac{-3\pm 9}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-3+9}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 \qquad x_2 = \frac{-3-9}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6$$

подставляем найденные корни в знаменатель:

$(x - 3)^2 \cdot (x + 3) = (-3 - 3)^2 \cdot (-3 + 3) = 0$; $x = -3$ не является корнем

$(x - 3)^2 \cdot (x + 3) = (6 - 3)^2 \cdot (6 + 3) \neq 0$; $x = 6$ является корнем

Ответ: а) – 1 б) 6.

3) Пусть первый токарь вытачивает за 1 час x деталей, тогда второй токарь вытачивает за 1 час $x - 2$ детали. Время работы первого токаря составит $\frac{60}{x}$ часов, а второго $\frac{60}{x-2}$ часов. По условию первый токарь работая затратил на 1 час меньше, чем второй, поэтому составляем уравнение: $\frac{60}{x-2} - \frac{60}{x} = 1$. Решаем полученное уравнение:

$$\frac{\overset{x}{60}}{x-2} - \frac{\overset{x-2}{60}}{x} - \overset{x(x-2)}{1} = 0$$

$$\frac{60x-60(x-2)-x(x-2)}{x(x-2)} = 0$$

$$\frac{60x-60x+120-x^2+2x}{x(x-2)} = 0$$

$$\frac{-x^2+2x+120}{x(x-2)} = 0$$

решаем уравнение $-x^2 + 2x + 120 = 0$

$D = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 120 = 4 + 480 = 484 > 0$

$$x_{1;2} = \frac{-2\pm\sqrt{484}}{2\cdot(-1)} = \frac{-2\pm22}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-2+22}{-2} = \frac{20}{-2} = -10 \qquad x_2 = \frac{-2-22}{-2} = \frac{-24}{-2} = 12$$

подставляем найденные корни в знаменатель:

$x(x-2) = (-10)\cdot(-10-2) \neq 0$; $x = -10$ является корнем

$x(x-2) = 12\cdot(12-2) \neq 0$; $x = 12$ является корнем

корень -10 не подходит по смыслу задачи(детали отрицательные),

первого токарь вытачивает 12 деталей, а второй $12 - 2 = 10$(деталей);

Ответ: 12 деталей и 10 деталей.

4) $(x^2 + 3x)^2 - 14x^2 - 42x + 40 = 0$

$(x^2 + 3x)^2 - 14(x^2 + 3x) + 40 = 0$

сделаем замену неизвестного $y = x^2 + 3x$, тогда

$y^2 - 14y + 40 = 0$

$D = (-14)^2 - 4\cdot1\cdot40 = 196 - 160 = 36 > 0$

$$y_{1;2} = \frac{14\pm\sqrt{36}}{2\cdot1} = \frac{14\pm6}{2}$$

$$y_1 = \frac{14+6}{2} = \frac{20}{2} = 10 \qquad y_2 = \frac{14-6}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

подставляем найденные корни и получаем два уравнения:

$x^2 + 3x = 10$ и $x^2 + 3x = 4$

решаем первое уравнение $x^2 + 3x = 10$

$x^2 + 3x - 10 = 0$

используя теорему Виета находим корни: -5 и 2;

решаем второе уравнение $x^2 + 3x = 4$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

используя теорему Виета находим корни: – 4 и 1;

Ответ: – 5; – 4; 1 и 2.

5) $x^3 + ax^2 - 5x - 6 = 0$; подставим значение одного из его корней 2 и найдём значение a: $2^3 + a \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 6 = 0$

$$8 + 4a - 10 - 6 = 0$$

$$4a - 8 = 0$$

$$4a = 8$$

$$a = 8 : 4 = 2$$

наше уравнение примет вид: $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$;

выполним деление многочлена $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ на $x - 2$(корень)

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - 5x - 6 & x - 2 \\ \cline{2-2} -\ \underline{x^3 - 2x^2} \qquad\qquad & x^2 + 4x + 3 \\ 4x^2 - 5x \qquad & \\ -\ \underline{4x^2 - 8x} \qquad & \\ 3x - 6 & \\ -\ \underline{3x - 6} & \\ 0 \quad & \end{array}$$

наше уравнение примет вид $(x^2 + 4x + 3)(x - 2) = 0$

решим уравнение $x^2 + 4x + 3 = 0$

используя теорему Виета находим корни: – 3 и – 1;

Ответ: – 3; – 1 и 2.