Решение контрольной работы № 6
«Системы рациональных уравнений»
Вариант 1

1) $\begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 16 \end{cases}$ преобразуем второе уравнение системы:

$\begin{cases} x + y = -2 \\ (x - y)^2 = 16 \end{cases}$ наша система сводится к решению двух систем:

$\begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = -4 \end{cases}$

выполним сложение уравнений в каждой системе:

$2x = 2$ или $2x = -6$

$x = 2 : 2 = 1$ или $x = -6 : 2 = -3$

подставим найденные значения в первые уравнения систем:

$1 + y = -2$ или $-3 + y = -2$

$y = -2 - 1$ или $y = -2 + 3$

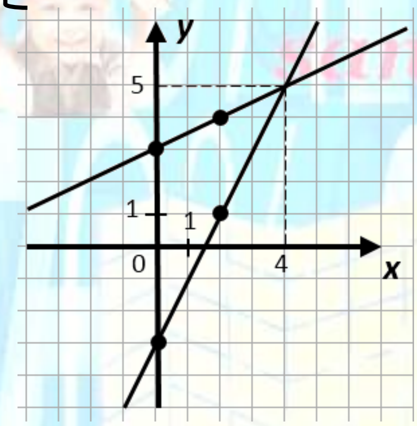
$y = -3$ или $y = 1$

$(1; -3)$ или $(-3; 1)$

Ответ: $(1; -3)$; $(-3; 1)$.

2) а) строим графики каждого уравнения системы

$\begin{cases} y = 0{,}5x + 3 & \text{прямая, проходящая через точки } (0;\ 3) \text{ и } (2;\ 4) \\ y = 2x - 3 & \text{прямая, проходящая через точки } (0;\ -3) \text{ и } (2;\ 1) \end{cases}$



точка пересечения $(4; 5)$;

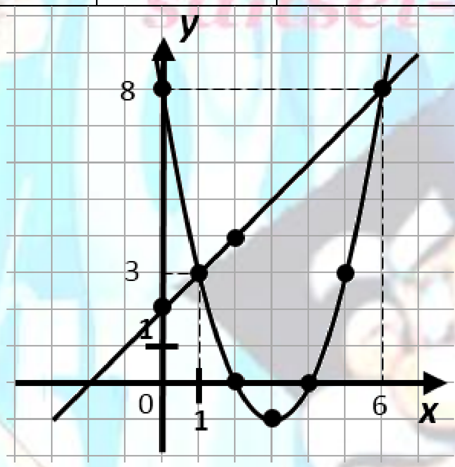
б) строим графики каждого уравнения системы

$\begin{cases} y = x + 2 & \text{прямая, проходящая через точки } (0;\ 2) \text{ и } (2;\ 4) \\ y = x^2 - 6x + 8 & \text{парабола, проходящая через точки:} \end{cases}$

$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2} = 3$ $\quad y_0 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 9 - 18 + 8 = -1$ $\quad (3; -1)$

Вычислим координаты нескольких точек параболы, симметричных относительно её оси $x = 3$:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	8	3	0	– 1	0	3	8



точки пересечения (1; 3) и (6; 8);

Ответ: а) (4; 5)   б) (1; 3) и (6; 8).

3) По условию график $y = kx + l$ проходит через данные точки, поэтому составляем систему уравнений: $\begin{cases} 4 = k \cdot 6 + l \\ 10 = k \cdot 4 + l \end{cases}$

решаем систему уравнений: $\begin{cases} 6k + l = 4 \\ 4k + l = 10 \end{cases}$

вычитаем из первого уравнения второе: $2k = – 6$, откуда $k = – 3$;

выполняем подстановку в первое уравнение: $– 18 + l = 4$, откуда $l = 22$

таким образом одна из функций задаётся $y = – 3x + 22$

по условию график $y = x^2 + bx + c$ тоже проходит через данные точки, поэтому составляем систему уравнений: $\begin{cases} 4 = 6^2 + b \cdot 6 + c \\ 10 = 4^2 + b \cdot 4 + c \end{cases}$

решаем систему уравнений: $\begin{cases} 36 + 6b + c = 4 \\ 16 + 4b + c = 10 \end{cases}$ упростим систему

$\begin{cases} 6b + c = – 32 \\ 4b + c = – 6 \end{cases}$

вычитаем из первого уравнения второе: $2b = – 26$, откуда $b = – 13$;

выполняем подстановку во второе уравнение: $– 52 + c = – 6$, откуда $c = 46$

таким образом вторая функция задаётся $y = x^2 – 13b + 46$

Ответ: $y = – 3x + 22$ и $y = x^2 – 13b + 46$.

4) Пусть стороны прямоугольника равны x см и y см. Используя условие задачи составляем систему уравнений: $\begin{cases} 2(x+y) = 28 \\ x^2 + y^2 = 10^2 \end{cases}$

решим систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 14 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$

выразим y через x из первого уравнения системы:

$$y = 14 - x$$

подставляем полученное выражение во второе уравнение системы:

$$x^2 + (14 - x)^2 = 100$$

$$x^2 + 196 - 28x + x^2 = 100$$

$$2x^2 + 196 - 28x - 100 = 0$$

$$2x^2 - 28x + 96 = 0 \quad \text{разделим на 2}$$

$$x^2 - 14x + 48 = 0$$

$$D = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 48 = 196 - 192 = 4 > 0$$

$$x_{1;2} = \frac{14 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{14 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{14+2}{2} = \frac{16}{2} = 8 \qquad x_2 = \frac{14-2}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

из выражения $y = 14 - x$ находим y_1 и y_2:

$$y_1 = 14 - 8 = 6; \quad y_2 = 14 - 6 = 8;$$

решением системы являются (8; 6) и (6; 8);

Ответ: 6 см и 8 см.

5) $\begin{cases} xy = -12 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым уравнением:

$\begin{cases} xy = -12 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 1 \end{cases}$ преобразуем второе уравнение системы:

$$\begin{cases} xy = -12 \\ (x + y)^2 = 1 \end{cases}$$

наша система сводится к решению двух систем:

$$\begin{cases} xy = -12 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} xy = -12 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

используя теорему Виета каждая система сводится к решению:

$$z^2 - z - 12 = 0 \quad \text{или} \quad z^2 + z - 12 = 0$$

$z_1 = 4 \quad z_2 = -3$ или $z_3 = 3 \quad z_4 = -4$

получаем:

$x_1 = 4\ y_1 = -3 \quad x_2 = -3\ y_2 = 4$ или $x_3 = 3\ y_3 = -4 \quad x_4 = -4\ y_4 = 3$

таким образом исходная система уравнений имеет решения:

$(4; -3); (-3; 4); (3; -4)$ и $(-4; 3)$;

Ответ: $(4; -3); (-3; 4); (3; -4)$ и $(-4; 3)$.