Решение контрольной работы № 6
«Системы рациональных уравнений»
Вариант 2

1) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 4 \end{cases}$ преобразуем второе уравнение системы:

$\begin{cases} x - y = 4 \\ (x + y)^2 = 4 \end{cases}$ наша система сводится к решению двух систем:

$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = -2 \end{cases}$

выполним сложение уравнений в каждой системе:

$2x = 6$ или $2x = 2$

$x = 6 : 2 = 3$ или $x = 2 : 2 = 1$

подставим найденные значения в первые уравнения систем:

$3 - y = 4$ или $1 - y = 4$

$y = 3 - 4$ или $y = 1 - 4$

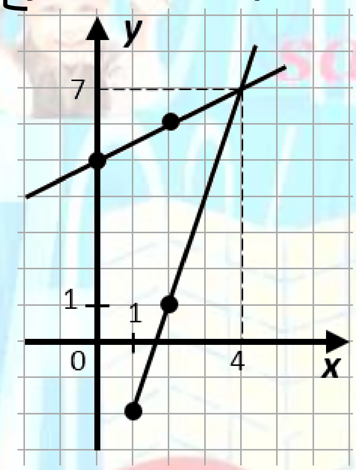
$y = -1$ или $y = -3$

$(3; -1)$ или $(1; -3)$

Ответ: $(3; -1)$; $(1; -3)$.

2) а) строим графики каждого уравнения системы

$\begin{cases} y = 0{,}5x + 5 & \text{прямая, проходящая через точки } (0; 5) \text{ и } (2; 6) \\ y = 3x - 5 & \text{прямая, проходящая через точки } (1; -2) \text{ и } (2; 1) \end{cases}$



точка пересечения (4; 7);

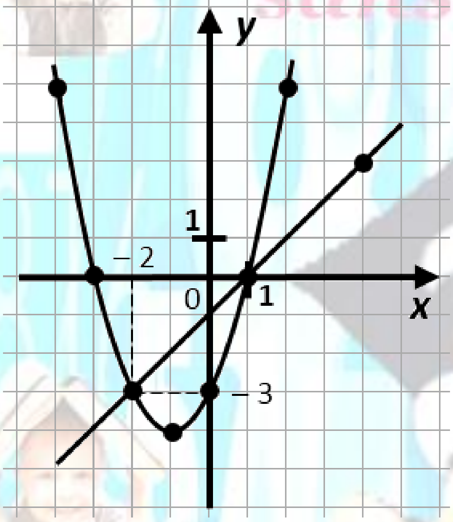
б) строим графики каждого уравнения системы

$\begin{cases} y = x - 1 & \text{прямая, проходящая через точки } (1; 0) \text{ и } (4; 3) \\ y = x^2 + 2x - 3 & \text{парабола, проходящая через точки:} \end{cases}$

$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2} = -1$ $\quad y_0 = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$ $\quad (-1; -4)$

Вычислим координаты нескольких точек параболы, симметричных относительно её оси $x = -1$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	5	0	-3	-4	-3	0	5



точки пересечения (1; 0) и (– 2; – 3);

Ответ: а) (4; 7)   б) (1; 0) и (– 2; – 3).

3) По условию график $y = kx + l$ проходит через данные точки, поэтому составляем систему уравнений: $\begin{cases} 4 = k \cdot (-4) + l \\ 10 = k \cdot (-6) + l \end{cases}$

решаем систему уравнений: $\begin{cases} -4k + l = 4 \\ -6k + l = 10 \end{cases}$

вычитаем из первого уравнения второе: $2k = -6$, откуда $k = -3$;

выполняем подстановку в первое уравнение: $12 + l = 4$, откуда $l = -8$

таким образом одна из функций задаётся $y = -3x - 8$

по условию график $y = x^2 + bx + c$ тоже проходит через данные точки, поэтому составляем систему уравнений: $\begin{cases} 4 = (-4)^2 + b \cdot (-4) + c \\ 10 = (-6)^2 + b \cdot (-6) + c \end{cases}$

решаем систему уравнений: $\begin{cases} 16 - 4b + c = 4 \\ 36 - 6b + c = 10 \end{cases}$ упростим систему

$\begin{cases} -4b + c = -12 \\ -6b + c = -26 \end{cases}$

вычитаем из первого уравнения второе: $2b = 14$, откуда $b = 7$;

выполняем подстановку в первое уравнение: $-28 + c = -12$, откуда $c = 16$

таким образом вторая функция задаётся $y = x^2 + 7b + 16$

Ответ: $y = -3x - 8$ и $y = x^2 + 7b + 16$.

4) Пусть стороны прямоугольника равны x см и y см. Используя условие задачи составляем систему уравнений: $\begin{cases} 2(x + y) = 34 \\ x^2 + y^2 = 13^2 \end{cases}$

решим систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 17 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases}$

выразим y через x из первого уравнения системы:

$$y = 17 - x$$

подставляем полученное выражение во второе уравнение системы:

$$x^2 + (17 - x)^2 = 169$$

$$x^2 + 289 - 34x + x^2 = 169$$

$$2x^2 + 289 - 34x - 169 = 0$$

$$2x^2 - 34x + 120 = 0 \quad \text{разделим на 2}$$

$$x^2 - 17x + 60 = 0$$

$$D = (-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60 = 289 - 240 = 49 > 0$$

$$x_{1;2} = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{17+7}{2} = \frac{24}{2} = 12 \qquad x_2 = \frac{17-7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

из выражения $y = 17 - x$ находим y_1 и y_2 :

$$y_1 = 17 - 12 = 5; \quad y_2 = 17 - 5 = 12;$$

решением системы являются (12; 5) и (5; 12);

Ответ: 5 см и 12 см.

5) $\begin{cases} xy = -10 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$

умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым уравнением:

$\begin{cases} xy = -10 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 9 \end{cases}$ преобразуем второе уравнение системы:

$$\begin{cases} xy = -10 \\ (x + y)^2 = 9 \end{cases}$$

наша система сводится к решению двух систем:

$$\begin{cases} xy = -10 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} xy = -10 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

используя теорему Виета каждая система сводится к решению:

$$z^2 - 3z - 10 = 0 \quad \text{или} \quad z^2 + 3z - 10 = 0$$

$z_1 = 5$ $z_2 = -2$ или $z_3 = -5$ $z_4 = 2$

получаем:

$x_1 = 5$ $y_1 = -2$ $x_2 = -2$ $y_2 = 5$ или $x_3 = -5$ $y_3 = 2$ $x_4 = 2$ $y_4 = -5$

таким образом исходная система уравнений имеет решения:

(5; – 2); (– 2; 5); (– 5; 2) и (2; – 5);

Ответ: (5; – 2); (– 2; 5); (– 5; 2) и (2; – 5).